

II.7 Expressions de la vitesse de M et hodographe

On sait, dans le cas elliptique, que la vitesse V de M satisfait l'équation (II.54) :

$$V^2 = \frac{2K}{r} + 2h$$

Or d'après (II.48), (II.49) et (II.51) :

$$p = \frac{C^2}{K} = a(1 - e^2) = -2a \frac{C^2 h}{K^2} \quad (II.85)$$

D'où :

$$h = -\frac{K}{2a} \quad (II.86)$$

qui est l'expression déjà trouvée en (II.69). Soit, en substituant cette dernière valeur à h dans l'équation (II.54) :

$$V^2 = K \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] \quad (II.87)$$

Exprimons maintenant les deux composantes de la vitesse \vec{V} du point M , l'une radiale, et l'autre normale au rayon vecteur. La première, $\frac{dr}{dt}$, s'obtient en dérivant r , donné par (II.50), par rapport au temps :

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos v}{p} \quad - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = - \left[\frac{e \sin v}{p} \right] \frac{dv}{dt} \quad (II.88)$$

Soit :

$$\frac{dr}{dt} = (r^2 \frac{dv}{dt}) \left[\frac{e \sin v}{p} \right] = \frac{C e \sin v}{p} \quad (II.89)$$

Quant à la seconde composante, normale au rayon vecteur, elle s'obtient simplement à l'aide de la constante des aires :

$$r \frac{dv}{dt} = \frac{C}{r} = \frac{C[1 + e \cos v]}{p} \quad (II.90)$$

Vectoriellement, on peut donc combiner ces deux expressions, à l'aide du vecteur unitaire \vec{u} porté par AM et du vecteur \vec{v} qui lui est perpendiculaire (dans le sens direct).

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\frac{dv}{dt}\vec{v} = \frac{Ce}{p}[\sin v\vec{u} + \cos v\vec{v}] + \frac{C}{p}\vec{v} = \frac{Ce}{p}\vec{j} + \frac{C}{p}\vec{v} \quad (II.91)$$

où on rappellera \vec{j} le vecteur perpendiculaire à l'axe des apsides de l'ellipse. \vec{V} est donc la somme vectorielle de deux vecteurs de norme constante constants, l'un, mobile, normal au rayon vecteur AM et de norme $\frac{C}{p}$, l'autre, fixe et colinéaire au vecteur \vec{j} dirigé dans le même sens que la vitesse au périhélie. L' **hodographe** de M , autrement dit la courbe dessinée par l'extrémité du vecteur vitesse, est donc un cercle de rayon $\frac{C}{p}$, dont le centre est situé à une distance $\frac{Ce}{p}$ de l'origine.

Appelons maintenant α l'angle que fait la vitesse \vec{V} de M avec la perpendiculaire au rayon vecteur, représentée par \vec{v} . On a :

$$\text{tang}\alpha = \frac{dr}{rdv} = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} = \frac{re \sin v}{p} \quad (II.92)$$

Evidemment, dans le cas du mouvement circulaire ($e = 0$), on s'aperçoit bien que cet angle est toujours nul.

II.8 Le mouvement hyperbolique

On a vu dans le chapitre II.5, en appliquant la loi de la gravitation de Newton pour les deux corps A et M en interaction, que le mouvement relatif de M par rapport à A est plan, et la trajectoire de M par rapport à A était donnée par l'équation (II.47), qui, inversée, donne :

$$r = \frac{\frac{C^2}{K}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2C^2h}{K^2}} \cos(\theta - \theta_0)} \quad (II.93)$$

Soit :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (II.94)$$

Avec :

$$p = \frac{C^2}{K} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2C^2h}{K^2}} \quad v = \theta - \theta_0$$

Lorsqu'on a étudié l'ellipse, h était négatif, mais cette équation est aussi valable lorsque $h > 0$ qui est le cas où l'orbite de M est hyperbolique, M décrivant une branche d'hyperbole de foyer A . Ici, p peut encore s'écrire :

$$p = \frac{C^2}{K} = a(e^2 - 1) \quad (II.95)$$

On remarque que l'expression de p est la même que dans le cas de l'ellipse, avec le signe opposé. p peut encore s'écrire :

$$p = \frac{C^2}{K} = 2a\left(\frac{C^2h}{K^2}\right) \quad (II.96)$$

après avoir substitué à e son expression ci-dessus. D'où on tire :

$$h = \frac{K}{2a} \quad (II.97)$$

La relation (II.39) qui est le résultat de l'application du théorème de l'énergie cinétique, reste quant à elle encore valable :

$$V^2 = 2h + \frac{2K}{r} \quad (II.98)$$

En remplaçant h par son expression ci-dessus, on trouve finalement :

$$V^2 = \frac{K}{a} + \frac{2K}{r} = K\left[\frac{1}{a} + \frac{2}{r}\right] \quad (II.99)$$

Il s'agit de la même équation que dans le cas elliptique (équation (II.75)), avec un changement de signe pour le premier terme du membre de droite.

Des résultats ci-dessus on peut tirer tout de suite un certain nombre de conclusions. Tout d'abord l'angle polaire v , au contraire du cas de l'ellipse, ne peut pas prendre toutes les valeurs possibles. Il est compris entre les angles limites $-v_\infty$ et v_∞ vers lesquels tend v lorsque $r \rightarrow \infty$, ce qui correspond à l'annulation du dénominateur dans l'équation (II.94) et permet de déterminer les asymptotes de la branche d'hyperbole :

$$v_\infty = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \quad (II.100)$$

De plus, l'équation (II.99) permet de donner la valeur V_∞ vers laquelle tend la vitesse de M lorsque sa distance r à A devient infiniment grande :

$$V_\infty = \sqrt{\frac{K}{a}} \quad (II.101)$$

Quant à la vitesse maximale V_{max} de M par rapport à A , elle s'obtient au périastre, en posant $v = 0$, soit $r = a(e - 1)$. Substitué dans (II.99), cela donne :

$$V_{max} = \sqrt{\frac{K}{a} + \frac{2K}{a(e - 1)}} = \sqrt{\frac{K(e + 1)}{a(e - 1)}} \quad (II.102)$$

D'autres propriétés du mouvement hyperbolique ne sont pas abordées ici.

II.9 Éléments orbitaux dans le problème des deux corps.

Jusqu'à maintenant on a montré que le problème des deux corps se caractérisait par une trajectoire soit elliptique ($h < 0$), soit parabolique (cas limite où $h = 0$) soit hyperbolique ($h > 0$). De plus, dans le cas de l'ellipse, on a montré que cette dernière était complètement modélisée par deux paramètres que sont le demi-grand axe a et l'excentricité e . Enfin la localisation du point M sur son orbite par rapport à A (A désignant soit le barycentre des deux corps, dans le cas du mouvement absolu de M , soit l'autre corps, dans le cas du mouvement relatif) est connue à chaque instant par la donnée soit de l'anomalie excentrique u , soit de l'anomalie vraie v .

Or ces différents paramètres ne permettent pas de situer la conique dans l'espace. Dans cette optique, on doit faire intervenir un plan fondamental que l'on pourra faire correspondre avec le plan (A, X, Y) défini à partir d'un référentiel $\mathfrak{R}_A = (A, X, Y, Z)$ dont l'origine est A et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel galiléen \mathfrak{R}_O défini dans le chapitre II.2 (cf. figure 2).

- **Ligne des noeuds**

L'orbite de M étant plane, on peut définir la *ligne des noeuds* qui est l'intersection du plan orbital avec le plan (A, X, Y) (l'intersection de deux plans non parallèles étant une droite). On appelle *noeud ascendant* N_a le point pour lequel la coordonnée Z de M croît au moment de son passage en N_a , passant d'une valeur négative à une valeur positive; par opposition le *noeud descendant* est celui pour lequel la coordonnée Z de M décroît, passant d'une valeur positive à une valeur négative.

- **Inclinaison de l'orbite**

L'angle qu'effectue le plan orbital avec le plan de référence (O, X, Y) est appelé l'*inclinaison* et est généralement appelé i , compris entre 0 et 180° . Si l'angle i est tel que $0 < i < 90^\circ$, on dit que le mouvement de M est dans le *sens direct*. Dans le cas contraire ($90^\circ < i < 180^\circ$) il est dans le *sens rétrograde*

- **Longitude du noeud ascendant.**

La position du noeud ascendant N_a est repérée par l'intermédiaire de l'angle $((A, X), AN_a) = \Omega$ défini dans le plan (A, X, Y) , encore appelé *longitude du noeud ascendant*.

- **Argument du périastre et longitude du périastre**

Afin de terminer le positionnement de l'orbite du mobile par rapport au référentiel $\mathfrak{R}_A = (A, X, Y, Z)$, et plus précisément dans son plan, il faut indiquer le long de l'orbite où se trouve le périastre P . Ceci se fait par l'intermédiaire de l'angle $\omega = (AN_a, AP)$ mesuré dans le plan de l'orbite. ω s'appelle l'*argument du périastre*. Il est compté dans le sens du mouvement (direct ou rétrograde). On peut encore

localiser le périastre P par rapport à l'axe (A, X) , par la somme des deux angles Ω et ω , en remarquant bien que ces deux angles **ne sont pas situés dans un même plan**. On appelle cette somme la *longitude du périastre*, que l'on nomme $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$. Notons que lorsque $i \rightarrow 0$ le noeud devient indéterminé et par conséquent il en sera de même de Ω et de ω . Par contre on pourra toujours définir $\tilde{\omega}$.

II.8 Coordonnées du mobile dans le référentiel $\mathfrak{R}_A = (A, X, Y, Z)$

Il est possible, en utilisant trois rotations successives, d'exprimer les coordonnées du mobile M soumis au mouvement elliptique, dans le référentiel $\mathfrak{R}_A = (A, X, Y, Z)$. Dans un premier temps, on peut considérer (figure 3) les axes (A, \vec{i}_1) porté par la droite AN_a et (A, \vec{j}_1) qui lui est directement orthogonal dans le plan de l'orbite. Les coordonnées du point M dans ce système d'axes sont : $r \cos(\omega + v)$ et $r \sin(\omega + v)$. On effectue ensuite une rotation d'angle $-i$ autour de l'axe (A, \vec{i}_1) , de telle sorte que (A, \vec{j}_1) est transformé en l'axe (A, \vec{j}_2) . Les coordonnées de M par rapport aux axes $(A, \vec{i}_1, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ (où \vec{k}_2 complète la triade) sont alors $A\vec{M} (r \cos(\omega + v), r \sin(\omega + v) \cos i, r \sin(\omega + v) \sin i)$. Il ne reste alors plus qu'à effectuer une dernière rotation d'angle $-\Omega$ autour de \vec{k}_2 , (A, \vec{i}_1) étant transformé en l'axe (A, \vec{i}_3) et (A, \vec{j}_2) en l'axe (A, \vec{j}_3) , \vec{k}_3 complétant la triade. Le repère $(A, \vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3)$ est alors bien confondu avec $\mathfrak{R}_A = (A, X, Y, Z)$. Les coordonnées de M dans \mathfrak{R}_A sont donc :

$$X = r \left[\cos(\omega + v) \cos \Omega - \sin(\omega + v) \sin \Omega \cos i \right] \quad (II.103)$$

$$Y = r \left[\cos(\omega + v) \sin \Omega + \sin(\omega + v) \cos \Omega \cos i \right] \quad (II.104)$$

$$Z = r \sin(\omega + v) \sin i \quad (II.105)$$

Les équations (II.103, II.104, II.105) donnent ainsi les coordonnées de M dans le repère \mathfrak{R}_A dans le cas où le mobile possède une trajectoire elliptique.