II.6 Etude du mouvement elliptique

Jusqu'à maintenant la résolution des équations du problème des deux corps nous a permis de déterminer la nature des trajectoires, selon la valeur de h, sans tenir compte du mouvement de M sur cette trajectoire. Dans ce nouveau chapitre, on considère le mouvement elliptique ($h < 0$) et on s'attache à déterminer le mouvement du point M autour de A, ce dernier occupant un des deux foyers de l'ellipse.

Relations entre anomalie vraie et anomalie excentrique

On se réfère à la figure 1. On appelle O le centre de l'ellipse, P le périastre, Γ le *cercle principal de l'ellipse*, autrement dit le cercle de centre O et de rayon le demi-grand axe a. La droite (A, x) portée par les points O et P est appelée la *ligne des apsides* (autrement dit la droite joignant le périastre à l'apoastre). On dispose en outre de la relation : $c = OA = ae$. Définissons maintenant le point M' du cercle principal tel que la projection de M' sur (A, x) soit la même que celle de M, et tel que M et M' soient situés du même côté par rapport à (A, x). L'angle u défini par $u = (OP, OM')$ est appelé **anomalie excentrique**. Appelons H la projection commune de M et de M' sur l'axe (A, x). On sait que la distance HM' est proportionnelle à HM, le rapport de proportionnalité étant $\sqrt{1-e^2}$:

$$HM = HM'\sqrt{1-e^2} \qquad (II.62)$$

Les projections de AM sur (A, x) et (A, y), respectivement AH et AI, peuvent alors s'écrire à l'aide de deux jeux de paramètres, à savoir (r, v) d'une part, et (a, e, E) d'autre part :

$$x = AH = r\cos v = OH - OA = a\cos u - ae = a(\cos u - e) \qquad (II.63)$$

$$y = AI = r\sin v = HM = a\sqrt{1-e^2}\sin u \qquad (II.64)$$

En prenant le carré des expressions ci-dessus, on trouve aisément :

$$r = a(1 - e\cos u) \qquad (II.65)$$

Et en substituant cette expression dans $(II.63)$ on trouve une relation liant $\cos v$ et $\cos u$:

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u} \tag{$II.66$}$$

Puis en utilisant la relation des angles moitiés :

$$\tan^2\frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} \tag{$II.67$}$$

On trouve, après substitution de $\cos v$ donnée par $(II.66)$:

$$\tan^2(\frac{v}{2}) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\tan^2(\frac{u}{2}) \tag{$II.68$}$$

Or, v et u sont toujours situés dans le même demi-plan, donc leurs moitiés sont toujours situées dans lemême quadrant, et leur signe est le même. Donc on peut transformer l'équation ci-dessus en :

$$\tan(\frac{v}{2}) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan(\frac{u}{2}) \tag{$II.69$}$$

En plus de l'anomalie vraie et de l'anomalie excentrique, introduisons une troisième anomalie appelée **anomalie moyenne** M, définie de la manière suivante à l'aide du moyen mouvement : $n = 2\pi/T$:

$$\mathrm{M} = \frac{2\pi}{T}(t - t_0) = n(t - t_0) \tag{$II.70$}$$

Ici on fait coincider le temps initial t_0 avec l'instant du passage au périastre P. Le moyen mouvement représente la vitesse angulaire moyenne de M, tandis que l'anomalie moyenne serait l'angle parcouru pendant l'intervalle de temps $t - t_0$ en supposant que le mouvement soit circulaire uniforme, de période T. De plus, on sait que par définition : $p = a(1 - e^2)$ et, en transformant l'équation $(II.49)$,

$$2h = \frac{K(e^2 - 1)}{p} \tag{$II.71$}$$

La substitution de p dans cette dernière équation donne donc :

$$h = -\frac{K}{2a} \qquad (II.69)$$

En utilisant la définition de n, $(II.58)$ et $(II.60)$ deviennent :

$$C = \frac{2\pi}{T} a^2 \sqrt{1-e^2} = na^2\sqrt{1-e^2} \qquad (II.73)$$

Et :

$$n^2 a^3 = K \qquad (II.74)$$

De plus,$(II.54)$ nous donne :

$$V^2 = 2h + \frac{2K}{r} = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \qquad (II.75)$$

Lois du mouvement : l'équation de Képler.

Connaître le mouvement de M revient à connaître à tout instant la valeur de u (ou de v) en fonction du temps t, ou l'inverse. Utilisons la définition de C constante des aires. L'aire balayée par le rayon vecteur AM entre les instants t_0 (passage au périastre) et t, autrement dit l'aire de la surface limitée par l'arc d'ellipse PM, les segments rectilignes AM et AP, est égale à :

$$\mathcal{A}_{PMA} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} C\mathrm{d}t = \frac{1}{2} na^2\sqrt{1-e^2}(t-t_0) = \frac{1}{2} Ma^2\sqrt{1-e^2} \qquad (II.76)$$

Or l'aire de la surface limitée par l'arc de cercle PM', les segments rectilignes AM' et AP se déduit de la précédente d'un facteur $1/\sqrt{1-e^2}$.

$$\mathcal{A}_{PM'A} = \frac{1}{2} a^2 M \qquad (II.77)$$

De plus, on peut décomposer cette dernière comme l'aire de la surface (OPM') limitée par le segment circulaire PM', et les segments OP et OM', ôtée de l'aire du triangle $(OM'A)$. Ce dernier a une hauteur de $HM' = a\sin u$, et une base $OA = ae$. Donc :

$$\mathcal{A}_{PM'A} = \mathcal{A}_{OPM'} - \mathcal{A}_{OM'A} = \frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}a^2e\sin u \qquad (II.78)$$

En identifiant $(II.77)$ avec $(II.78)$, on trouve alors :

$$\frac{1}{2}a^2\mathrm{M} = \frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}a^2e\sin u \qquad (II.79)$$

Soit :

$$u - e\sin u = \mathrm{M} = n(t - t_0) \qquad (II.80)$$

Cette équation liant le temps à l'anomalie excentrique est appelée l' **équation de Képler**.

Il est possible de retrouver cette équation de manière purement calculatoire, sans avoir recours à un quelconque raisonnement de géométrie. On commence par dériver les deux membres de l'équation $(II.69)$, ce qui permet d'exprimer $\mathrm{d}v$ en fonction de $\mathrm{d}u$:

$$\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{1+\cos v}{1+\cos u}\mathrm{d}u \qquad (II.81)$$

L'équation $(II.73)$ donne alors :

$$C = r^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r^2\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)\left(\frac{1+\cos v}{1+\cos u}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = na^2\sqrt{1-e^2} \qquad (II.82)$$

Puis on peut exprimer r^2 et $r^2\cos v$ en fonction de u grâce aux équations $(II.63)$ et $(II.65)$. On obtient alors :

$$a^2\left[\frac{(1-e\cos u)(1-e\cos u+\cos u-e)}{1+\cos u}\right]\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = na^2\sqrt{1-e^2} \qquad (II.83)$$

Soit, après simplification :

$$(1-e\cos u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = n \qquad (II.84)$$

$(C.Q.F.D.)$.

Ainsi, pour un instant donné t, on peut connaître la position de M. En effet l'équation de Képler $(II.80)$ une fois résolue on en déduit l'anomalie excentrique u, et on peut tout de suite en déduire x et y par les équations $(II.63)$ et $(II.64)$.