Revista Española de Física, **14,** n°4, p 7-9, 2000

Traduction au français de l'original en espagnol.

ENSEIGNER CE QUE L'ON ENSEIGNE

Bartolomé Coll

Systèmes de référence spatio-temporels, CNRS, UMR-8630
DANOF, Observatoire de Paris
61, Avenue de l'Observatoire
75014-Paris
e-mail : bartolome.coll@obspm.fr

Une promenade sur des faits, opinions et questions liés à l'enseignement
et spécialement à l'enseignement des mathématiques.

Juste proportion et aliénation

Dans le sens de ce qu'en Grèce ancienne était considéré comme culture ou connaissance scientifique, *mathêma* désignait « ce que l'on enseigne » ; et *mathematikos* « celui qui désire apprendre », le scientifique . Notre mot *mathématique* dérivera de là, plus d'un millénaire après, à travers le latin *mathematicus.*

Aujourd'hui enseigner les mathématiques a un sens plus restreint que celui d'enseigner la culture scientifique. Mais à des questions comme *qu'est-ce* que nous enseignons?, *comment* et *pourquoi* l'enseignons-nous?, les deux sens admettent des réponses semblables; des réponses fréquemment ambiguës et complexes, par moments même absurdes, et presque toujours passionnées.

Il est néanmoins important d'essayer de comprendre les mécanismes et les motivations qui se cachent sous les processus de sélection et de présentation de ce que nous enseignons, si nous voulons réellement réussir l'éducation de nos jeunes. Réussir dans le sens de leur offrir les instruments culturels adéquats pour que le monde qui, en s'appuyant sur le nôtre, ils sont en train de construire, soit visiblement meilleur, car il est clair que, en beaucoup d'aspects, il en a fort besoin.

Dans ce but, je ne crois pas que l'on ait besoin de nouvelles méthodes, idéologies ou philosophies sur la connaissance scientifique, mathématique ou non, et moins encore sur son enseignement. La variété de celles qui existent déjà, et ce que le passé nous révèle d'elles, me semblent montrer suffisamment ces trois choses : que chacune d'elles prise séparément est insuffisante autant pour donner une bonne panoramique de la matière enseignée que pour s'adapter aux différentes personnalités des élèves qui suivent cet enseignement; que tous ces ingrédients pris ensemble permettent de mener à bien ces deux objectifs; et que l'art de les mener à bien, de réussir l'enseignement, consiste en la judicieuse proportion avec laquelle on mélange ces méthodes ou philosophies.

L'adaptation de cet art aux exigences du prochain siècle, doit être faite, bien sûr, institutionnellement, mais elle repose grandement aussi dans le patrimoine culturel et l'intérêt personnel de chaque enseignant. C'est pour cela qu'il me semble pertinent ici de me borner à rehausser et rappeler des faits et valeurs qui puissent aider ces enseignants dans leurs réflexions, avec l'espoir de les aider à ajuster, s'il y a lieu, cette proportion de méthodes et philosophies.

Il est clair que la mission principale de la culture est d'améliorer les relations humaines, la compréhension du monde et de nous-mêmes. Mais la culture, comme toute autre culture humaine, quand elle est absorbée sans réflexion est aussi aliénation. Et quand cela arrive, cette aliénation culturelle, même prestigieuse, ou peut être à cause de ceci, peut devenir nocive.

Chaque culture octroie, explicite ou implicitement, des poids ou valeurs relatives à chaque activité humaine, à chaque concept (elle définit des relations spécifiques d'ordre partiel, dirait un mathématicien). De telle sorte que, plus nous nous imprégnons d'elle, de ses formes et de ses méthodes, plus grande est la tendance et l'habileté que nous acquérons pour les perpétuer. A moins de simultanéer cette formation avec des doses de réflexion appropriées, le résultat risque d'être, et l'est parfois, celui de perpétuer une échelle de valeurs non seulement devenue anachronique, mais de laquelle nous avons fréquemment oublié comment et pourquoi elle s'est établie, c'est à dire, sa signification. Alors, la culture laisse d'accomplir sa mission principale et devient, individuellement, un film superficiel de ségrégation de classes et, socialement, un lest qui freine le progrès. La culture scientifique, bien sûr, n'échappe non plus à ce risque.

Il n'existe pas de panacée universelle pour nous débarrasser d'aliénations et préjugés. La désaliénation est un délicat processus d'intériorisation individuelle dans lequel, si l'intention est nécessaire, elle est aussi fréquemment insuffisante. Il me semble que ce qui est aussi plausible ici est de parler d'éléments (opinions, détails, questions) potentiellement 'catalyseurs' de ce processus.

Ce que nous suggère la rhétorique romaine

Comme nous avons tendance à plus nous passionner en parlant de nous-mêmes que des autres, et du présent que du passé, commençons par nous promener quelques instants par le Latium du début de notre ère.

D'après ce que nous disent certains livres d'histoire, les patriciens romains, amateurs de l'agriculture, comme nous le rappellent quelques noms comme Fabius ou Lentulus, et de la guerre, comme il est superflu de le rappeler, ont montré si peu d'intérêt pour d'autres travaux, qu'ils se les sont auto-interdit par la loi Flamine (en réalité ils se sont interdit la non-oisiveté, nec-otium ou négoce; le mot travail n'apparaîtra qu'un millénaire plus tard, dérivée d'un objet utilisé pour la torture).

Elles n'étaient pas bien vues, non plus, dans la Rome de notre époque, les sciences naturelles et mathématiques, lesquelles, avec la philosophie, étaient néanmoins tranquillement enseignées par les grecs à Athènes et Alexandrie. Bien que Vespasien avait expulsé les philosophes de Rome, les études philosophiques ne s'étaient en fait jamais rétabli des prohibitions dictées par le Sénat plus de deux siècles avant. D'autre part, la politique avait disparu du Forum avec les prétoriens et, depuis Auguste jusqu'à Adrien, le droit était restreint électivement à des groupes de spécialistes. Ainsi, mis à part l'enseignement primaire, à l'aristocratie romaine ne lui restait, comme formation intellectuelle générale pour ses jeunes, que la rhétorique.

Il est choquant que, grande admiratrice de la culture grecque, l'élite romaine se soit limitée à n'apprendre d'elle guère plus que sa langue (les classes de grammaire à Rome demeurèrent bilingues jusqu'à la fin du haut empire), et ait considéré l'étude des autres savoirs grecs comme impropre d'elle.

Sans intention de juger les romains, je crois bon de considérer ici ces faits pour inciter notre imagination à des questions qui nous soient *aujourd'hui* pertinentes. L'histoire, les circonstances, nos nécessités, l'appréciation de nous mêmes, ont changé énormément depuis, mais, avec les proportions dues, pourrions-nous réellement affirmer que notre système actuel d'enseignement est plus libre de préjugés que celui des romains? Nous voyons clairement que nous nous sommes bien libérés des préjugés explicités dans la description précédente, mais pouvons-nous affirmer que nous nous sommes aussi libérés des préjugés propres à notre histoire récente?; qu'est-ce que diront les futurs historiens de notre enseignement dans quelques siècles?; le verront-ils aussi absurde que celui des romains?; quels sont les indices que nous avons pour le savoir et essayer de le réparer, s'il y a lieu?.

Une citoyenneté de droit

Creusons un petit peu dans le passé et le présent des matières choisies par mis celles qui ont été considérées comme 'choisissables', des formes de les organiser et de les présenter, des méthodes de les enseigner. Il est facile de voir que les questions précédentes n'ont pas de réponse claire: le long d'une histoire complexe, l'enseignement secondaire et universitaire a cumulé bon nombre d'anachronismes.

C'est ainsi, par exemple, pour l'enseignement du droit, qui depuis le XIIIème siècle avait été ajouté aux déjà wisigothiques trivium et quadrivium dans les études générales, précurseurs des universités. Il fut interdit aussi bien dans celles-ci que dans celles-là à la fin du XVIIIème, parce qu'il était considéré comme 'dangereux pour la stabilité sociale'. Aujourd'hui, deux siècles plus tard , dans nos actuels « états de droit », nos gouverneurs semblent saisis des mêmes peurs.

Si le programme de l'enseignement primaire (lecture, écriture, calcul), vieux de deux millénaires, semble adéquat pour être imposé obligatoirement à toute une nation, celui de l'enseignement secondaire pose quelques doutes vis à vis d'une telle imposition obligatoire. Rappelons-nous que ce programme fut pensé par la moyenne bourgeoisie pour donner à ses enfants une éducation semblable à celle que la classe aristocratique recevait de ses tuteurs privés. Il y a lieu de se demander si le temps n'est pas déjà arrivé de changer de modèle, et de repenser celui-ci pour l'enseignement d'une authentique *citoyenneté de droit*.

De repenser le modèle, non pas nécessairement de le révolutionner, car ce qui est critiquable n'est pas d'enseigner la rhétorique ou les matières actuelles, mais de les choisir à priori comme les seules préférables, sans analyser sérieusement si elles méritent la peine d'être *partagées*, *substituées* ou *alternées* avec d'autres matières susceptibles de contribuer, autant ou plus, à cette citoyenneté de droit.

On pourrait alors se demander, par exemple, pourquoi on considère, pour ne pas parler de gastronomie, que la diététique n'est pas culture digne d'un enseignement secondaire; les plaisirs du goût et de l'odorat, les agréables sensations propioceptives d'une alimentation équilibrée, peuvent prédisposer à la sérénité et à la sensibilité de l'esprit autant qu'une bonne musique, et indirectement pallier les croissants problèmes d'obésité dans lesquels notre société semble s'enliser inévitablement.

En tout cas, vie et infrastructure des villes, médecine élémentaire et premiers secours, code de la route, conduction et comportement urbain, par exemple, ont autant de droit culturel, sinon plus, à figurer dans le programme d'un enseignement général, que l'usage des ordinateurs. Je ne m'oppose non plus à cet usage mais, étant données les raisons avancées par ses partisans, je me demande pourquoi alors on ne nous a pas enseignés, par le passé, la sténographie, qui, entre autre, aurait permis après, aux universitaires en pénurie bibliographique, de prendre rapide et efficacement les notes des cours ; nous aurions appris davantage et mieux, et nous serions aujourd'hui des meilleurs professionnels (… !). La partie non sérieuse ici est claire, mais quelles sont les parties de snobisme et d'intérêts commerciaux dans cette "ordinatrice" affaire ?

Importance et rôle des mathématiques

La meilleure mesure du degré de développement d'une société est, sans aucun doute, celle du niveau de formation de ses membres. Ses membres sont la « machinerie » fondamentale de cette « industrie » (dans son sens premier d'«activité ») de compréhension de notre environnement, de nous-mêmes et des autres ; et l'efficacité de cette machinerie est une fonction directe du niveau de formation acquis. Aujourd'hui, la *stabilité* de cette labeur de compréhension est attachée à l'autre industrie, celle qui fabrique des biens et des services. Pour être citoyen de droit de cette société, pour pouvoir bouger au sein d'elle avec souplesse, sans la ressentir oppressive, on a besoin d'un bagage minimum de savoir-faire. L'enseignement obligatoire primaire et secondaire est le responsable de le fournir: après, un bagage spécialisé plus élaboré, de niveau universitaire, sera nécessaire pour la participation constructive dans la compréhension et le contrôle de notre environnement. Dans tous ces niveaux, la mathématique joue un rôle important. Et ce rôle la mathématique le joue essentiellement de deux manières: comme instrument de travail, en facilitant le calcul ou l'évaluation de situations techniques, et comme mode de pensée, en aidant à l'appréhension de la réalité qui nous entoure.

Pendant plusieurs années, parfois depuis leur création, pour sélectionner ses élèves, quelques institutions d'enseignement supérieur, dans leurs examens d'admission, ont exigé la résolution de difficiles problèmes de mathématiques. On pensait que c'était une bonne méthode pour sélectionner les meilleurs, mais c'était faux : beaucoup de candidats se préparaient en apprenant par cœur d'énormes quantités de problèmes, à quelqu'un desquels celui de l'examen finissait toujours par se ressembler. Ainsi, bien qu'un niveau mathématique non négligeable était nécessaire pour ingérer cette énorme quantité de problèmes, la méthode ne sélectionnait pas les mieux doués: peux sont les excellents mathématiciens qui acceptent si fortes doses de mémorisation. Par ailleurs, la méthode et le contexte ont eu le pernicieux effet, aujourd'hui encore bien vivant, de transformer les mathématiques pratiquement en le seul indicateur pour l'orientation 'sciences' ou 'lettres' de nos bacheliers.
Ces pratiques devraient disparaître et faire place à des critères de qualité plus fiables, et pas seulement pour des motifs de déontologie.

Jusqu'à il y a quelques années, en chaque pays, le nombre de jeunes bien doués pour les mathématiques était largement supérieur au nombre de postes de travail qui exigeaient une bonne qualification mathématique. Mais aujourd'hui, avec l'explosion des technologies de tout ordre, cela commence à ne plus être vraie. Si notre société ne veut pas être freinée par le manque de mathématiciens, et de scientifiques et techniciens avec le savoir-faire mathématicien adéquat, il est nécessaire que les examens d'évaluation ne soient pas répulsifs aux élèves bien doués. Et pour la même raison, il est important que préalablement l'enseignement des mathématiques ne soit pas non plus répulsif aux élèves potentiellement doués. Jamais cette société n'a eu autant besoin de développer et profiter les capacités mathématiciennes de ses membres. C'est pour cela qu'il est si important d'atténuer au maximum les exagérations de méthode, idéologie ou philosophie avec lesquelles on enseigne souvent les mathématiques.

Connaissance mathématique et enseignement

Entre la fin du siècle dernier et le début de celui-ci, «les mathématiques» se sont transformés en «mathématique». Cela s'est produit en montrant que les thèmes historiques arithmétique, géométrie, algèbre, analyse, pouvaient se fonder sur des structures communes, et en élaborant conséquemment un langage commun pour eux tous. Cette constatation empêcha la fragmentation presque explosive de ces thèmes, et montra l'unité structurale de «la mathématique».

La découverte de l'unité structurelle des mathématiques a enrichi la vision que l'on avait de ses branches, et les techniques mises au point pour y aboutir ont permis un développement sans précédent. Mais ces mêmes techniques n'ont pas été neutres: leur succès a incité certains mathématiciens à les considérer comme étant l'essence même de la mathématique, donnant lieu à des opinions, idéologies et philosophies extrêmes prenant appui sur elles : « logicistes », « rigoristes », axiomaticistes », « formalistes ». Si le nombre de mathématiciens extrémistes est petit, celui de ceux qui donnent une importance démesurée à certains de ces courants est grand. Fréquemment cette importance révèle simplement le goût, habileté ou affinité personnelle du mathématicien, sujet que l'on n'a pas à juger. Mais malheureusement il n'est pas difficile de voir cette simple habileté transformée en méthode d'enseignement, et cela est vraiment lamentable.

Il est pertinent ici de rappeler quelques phrases de David Hilbert (*): *« Comme toute autre science, la mathématique ne peut pas se construire uniquement sur la seule logique. Une donnée est indispensable, composée d'objets concrets, résultat d'une expérience antérieure à la pensée. Pour assurer la validité des déductions, ces objets doivent pouvoir être examinés sous toutes leur faces. Leur présentation, leur discrimination, leur ordonnance, leur relation de voisinage doivent être données immédiatement et intuitivement et cela de façon irréductible à d'autres relations. Telle est ma position philosophique devant les mathématiques, les objets que nous examinons sont des signes qui pour nous sont clairs et reconnaissables. C'est là un minimum que tout penseur doit accepter".*

Ce paragraphe montre l'insuffisance des extrémismes logicistes, axiomatiques et formalistes : la mathématique se construit sur des « être mathématiques », Hilbert les a vu et utilisé, et la logique, l'axiomatique et le formalisme nous permettent d'en créer de nouveaux, d'en déduire des propriétés, d'organiser leur connaissance et de parler d'eux. Le fait que la mathématique n'impose pas de représentation unique de ces êtres, laissant à chaque mathématicien le choix de sa représentation personnelle, et la possibilité de la changer par convenance ou expérience, n'invalide pas les mots de Hilbert. Mais, s'il est sans importance que certains mathématiciens, dans leur *définition* de la mathématique, ne veulent pas inclure ces êtres mathématiques que dans son *exercice* leur esprits ne cessent pas de manipuler, je crois très grave qu'ils osent affirmer, aux apprentis mathématiciens, que ces êtres *n'existent pas*; les élèves qui fondent leur confiance en ces professeurs perdront un appui fondamental pour la bonne et rapide compréhension des mathématiques.

Quand à la rigueur, n'oublions pas que ses extrémismes sont alimentés par la fausse idée que beaucoup ont du «caractère rigoureux de la rigueur». S'il est évident qu'en mathématique, contrairement à toutes les autres sciences, les seules confirmations acceptables sont les démonstrations formelles, il n'est pas non plus difficile de se rendre compte des limitations de la rigueur : qu'un extrémiste de la rigueur essaie d'exprimer le contenu de sa première leçon en termes d'une machine de Turing, et il s'apercevra, s'il réussi, du nombre de mois de travail dans lequel s'est dédoublée sa première petite heure de cours. La rigueur s'arrête là ou commence l'évidence : au delà, elle dégoûte, tue la créativité et s 'évanouit stérilement.

On sait que l'«évidence» , résultat d'analyses, expériences et réflexions profondes, varie avec l'époque et le niveau de connaissances du sujet sur le thème spécifique en question. Morris Kline le montre bien quand il dit (**): *"la géométrie euclidienne était supposée offrir des preuves rigoureuses de théorèmes suggérés intuitivement par des figures, mais en fait elle offrait des preuves intuitives de figures rigoureusement dessinées".*

Qu'est-ce que, dans deux cent ans, les mathématiciens penseront du caractère rigoureux des rigoristes d'aujourd'hui ? A propos, j'ai lu il y a peu de temps que les théorèmes élémentaires de la géométrie euclidienne n'ont pas pu encore être prouvés avec ordinateur. Ce n'est pas étonnant, après ce qui vient de nous dire Kline, et moins encore si l'on ajoute que l'ordinateur manque, en paraphrasant à Hilbert, « de la donnée, composée d'objets concrets, résultat d'une expérience antérieure à la pensée ».

En guise de résumé : excuses et souhaits

L'espace de cet article m'a échappé, en partie par manque de temps, sans à peine avoir pu ébaucher les points que, au début, j'avais cru bon commenter. Peut être est-il mieux ainsi, parce que, bien que mon intérêt pour le thème soit grand, mon expérience en écrivant sur lui est très petite.

Au fond, ce que je voulais dire est que *la meilleure manière d'enseigner les mathématiques est la "vraie", c'est à dire celle qui montre chacune des composantes humaines qui interviennent dans son élaboration; c'est ainsi, et seulement ainsi, que l'on peut faire entrer en résonance tous les élèves capables de l'apprendre*.

Tout le problème est de localiser sans préjugés ces composantes humaines. Les quelques commentaires précédents ont été écrits avec ce souhait.

(*) D. Hilbert, *Les fondements de la géométrie* (1899), traduction française Dunod, Paris 1971. Cité par R. Bkouche & M. Soufflet dans *Enseignement de la Géométrie,* Bull. Inter-Irem n° 23, 1983.

(**) M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford University Press, 1972. Cité par R. Bkouche & M. Soufflet dans *Enseignement de la Géométrie,* Bull. Inter-Irem n° 23, 1983.